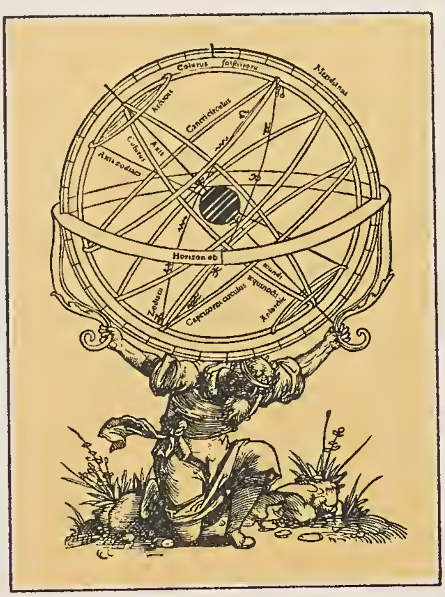


# Wissenschaftliche Classiker

in

# Facsimile-Drucken.

---

Band I.

BERLIN.
**Mayer & Müller.**
1887.

# Geometrische Untersuchungen

zur

# Theorie der Parallellinien

von

**Nicolaus Lobatschewsky,**
Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Universität Kasan.

2. unveränderte Auflage.

**Berlin,**
Mayer & Müller.
1887.

# Theorie der Parallelen.

In der Geometrie fand ich einige Unvollkommenheiten, welche ich für den Grund halte, warum diese Wissenschaft, so lange sie nicht in die Analysis übergeht, bis jetzt keinen Schritt vorwärts thun konnte aus demjenigen Zustande, in welchem sie uns von Euclid überkommen ist. Zu den Unvollkommenheiten rechne ich die Dunkelheit in den ersten Begriffen von den geometrischen Größen, in der Art und Weise wie man sich die Ausmessung dieser Größen vorstellt, und endlich die wichtige Lücke in der Theorie der Parallelen, welche auszufüllen, alle Anstrengungen der Mathematiker bis jetzt vergeblich waren. Die Bemühungen Legendre's haben zu dieser Theorie nichts hinzugefügt, indem er genöthigt war, den einzigen strengen Gang zu verlassen, sich auf einen Seitenweg zu wenden, und zu Hülfssätzen seine Zuflucht zu nehmen, welche er sich unbegründeter Weise bemühet als nothwendige Axiome darzustellen.

Meinen ersten Versuch über die Anfangsgründe der Geometrie veröffentlichte ich im „Kasan'schen Boten" für das Jahr 1829. In der Hoffnung, allen Anforderungen genügt zu haben, beschäftigte ich mich hierauf mit einer Abfassung dieser Wissenschaft im Ganzen, und publicirte diese meine Arbeit in einzelnen Theilen in den „Gelehrten Schriften der Universität Kasan" für das Jahr 1836, 1837, 1838 unter dem Titel: „Neue Anfangsgründe der Geometrie; mit einer vollständigen Theorie der Parallelen." Der Umfang dieser Arbeit hindert vielleicht meine Landsleute einem solchen Gegenstande zu folgen, welcher nach Legendre sein Interesse verloren hat. Ich bin jedoch der Ansicht, daß die Theorie der Parallelen nicht ihre Ansprüche auf die Aufmerksamkeit der Geometer verlieren durfte, und deshalb beabsichtige ich hier das Wesentliche meiner Untersuchungen darzulegen, indem ich voraus bemerke, daß der Meinung Legendre's zuwider alle übrigen Unvollkommenheiten, z. B. die Definition der geraden Linie, sich hier fremdartig und ohne allen eigentlichen Einfluß auf die Theorie der Parallelen zeigen.

Um meine Leser nicht zu ermüden durch die Menge solcher Sätze, deren Beweise keine Schwierigkeiten darbieten, gebe ich hier nur diejenigen im Voraus an, deren Kenntniß für das Folgende nöthig ist.

1) Eine gerade Linie deckt sich selbst in allen Lagen. Hierunter verstehe ich, daß bei der Drehung der Fläche die gerade Linie ihren Ort nicht verändert, wenn sie durch zwei unbewegliche Punkte in der Fläche geht.

2) Zwei gerade Linien können sich nicht in zwei Punkten schneiden.

3) Eine gerade Linie, auf beiden Seiten genugsam verlängert, muß über jede Grenze hinausgehen, und theilt auf solche Weise eine begrenzte Ebene in zwei Theile.

4) Zwei gerade Linien, die auf ein und derselben dritten senkrecht sind, schneiden sich nie, wie weit sie auch immer verlängert werden.

5) Eine gerade Linie schneidet jederzeit eine andere gerade, wenn sie von einer Seite derselben auf die andere Seite übergeht.

6) Scheitelwinkel, bei denen die Seiten des einen die Verlängerungen der Seiten des anderen sind, sind gleich. Dies gilt von ebenen geradlinigen Winkeln unter sich, so wie von ebenen Flächenwinkeln.

7) Zwei gerade Linien können sich nicht schneiden, wenn eine dritte sie unter gleichen Winkeln schneidet.

8) Im geradlinigen Dreiecke liegen gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber, und umgekehrt.

9) Im geradlinigen Dreiecke liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypothenuse größer als jede Cathete und die an ihr anliegenden Winkel sind spitz.

10) Geradlinige Dreiecke sind congruent, wenn bei ihnen eine Seite und zwei Winkel gleich, oder zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel gleich, oder wenn zwei Seiten und der Winkel, welcher der größten Seite gegenüber liegt, gleich, oder wenn drei Seiten gleich sind.

11) Eine gerade Linie, welche perpendikulär auf zwei anderen geraden Linien steht, die sich

mit ihr nicht in einer Ebene befinden, ist senkrecht auf allen geraden Linien, welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt in der Ebene der beiden letztern gezogen werden können.

12) Der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis.

13) Eine gerade Linie, die perpendikulär auf dem Durchschnitt zweier Ebenen ist, und in einer der beiden schneidenden Ebenen liegt, ist senkrecht auf der andern Ebene.

14) In einem sphärischen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt.

15) Sphärische Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, oder eine Seite und die anliegenden Winkel gleich sind.

Von hier folgen die übrigen Sätze mit ihren Erläuterungen und Beweisen.

16) Alle geraden Linien, welche in einer Ebene von einem Punkte auslaufen, können mit Bezug auf eine gegebene gerade Linie in derselben Ebene in zwei Klassen getheilt werden, und zwar in schneidende und nicht schneidende. Die Grenzlinie der einen

und anderen Klasse jener Linien wird der gegebenen Linie parallel genannt.

Es sei vom Punkte A (Fig. 1.) auf die Linie BC der Perpendikel AD gefällt, auf welchem wieder AE senkrecht errichtet sein soll. Im rechten Winkel EAD werden entweder alle geraden Linien, welche vom Punkte A ausgehen, die Linie DC treffen, wie z. B. AF, oder einige derselben werden, ähnlich dem Perpendikel AE, die Linie DC nicht treffen. In der Ungewißheit, ob der Perpendikel AE die einzige Linie sei, welche mit DC nicht zusammentrifft, wollen wir annehmen, es sei möglich, daß es noch andere Linien, z. B. AG gäbe, welche DC nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag. Bei dem Uebergange von den schneidenden Linien AF zu den nicht schneidenden AG, muß man auf eine Linie AH treffen, parallel mit DC, eine Grenzlinie, auf deren einer Seite alle Linien AG die DC nicht treffen, während auf der andern Seite jede gerade Linie AF die Linie DC schneidet. Der Winkel HAD zwischen der Parallele HA und dem Perpendikel AD heißt Parallel-Winkel (Winkel des Parallelismus), diesen werden wir hier durch $\Pi(p)$ bezeichnen für **AD** = p. Wenn $\Pi(p)$ ein rechter Winkel ist, so wird die Verlängerung **AE'** des Perpendikels **AE** ebenfalls parallel sein der Verlängerung **DB** der Linie **DC**; wozu wir noch bemerken, daß in Beziehung auf die vier rechten Winkel, welche am Punkte **A** durch die Perpendikel **AE** und **AD**, und ihren Verlängerungen **AE'** und **AD'** gebildet werden, jede gerade Linie, welche vom Punkte **A** ausgeht, entweder selbst, oder doch wenigstens mit ihrer Verlängerung, in einem der zwei rechten Winkeln liegt, welche nach **BC** hingekehrt sind, so daß außer den Parallelen **EE'** alle übrigen, wenn sie nach beiden Seiten hinreichend verlängert werden, die Linie **BC** schneiden müssen.

Wenn $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ so wird auf der andern Seite von **AD** unter demselben Winkel **DAK** = $\Pi(p)$ noch eine Linie **AK** liegen, parallel mit der Verlängerung **DB** der Linie **DC**, so daß bei dieser Annahme wir noch eine Seite des Parallelismus unterscheiden müssen. Alle übrigen Linien oder Verlängerungen derselben, innerhalb der beiden nach **BC** zugewendeten rechten Winkel, gehören zu den schneidenden, wenn sie innerhalb des Winkels **HAK** = 2 $\Pi$(p) zwischen den Parallelen liegen; sie gehören dagegen zu den nicht schneidenden **AG**, wenn sie auf der anderen Seite der Parallelen **AH** und **AK**, in der Oeffnung der zwei Winkel **EAH** = $\frac{1}{2}\pi - \Pi$(p), **E'AK** = $\frac{1}{2}\pi - \Pi$(p) zwischen den Parallelen und der auf **AD** perpendikulären **EE'** liegen. Auf der anderen Seite des Perpendikels **EE'** werden auf ähnliche Weise die Verlängerungen **AH'** und **AK'** der Parallelen **AH** und **AK** ebenfalls parallel mit **BC** sein; die übrigen Linien gehören im Winkel **K'AH'** zu den schneidenden, in den Winkeln **K'AE**, **H'AE'** aber zu den nichtschneidenden.

Demnach können bei der Voraussetzung $\Pi$(p) = $\frac{1}{2}\pi$ die Linien nur schneidende oder parallele sein; nimmt man jedoch an, daß $\Pi$(p) $< \frac{1}{2}\pi$, so muß man zwei Parallelen zulassen, eine auf der einen und eine auf der andern Seite; außerdem muß man die übrigen Linien unterscheiden in nichtschneidende und schneidende. Bei beiden Voraussetzungen dient als Merkmal des Parallelismus, daß die Linie eine schneidende wird, bei der kleinsten Abweichung nach der Seite hin, wo die Parallele liegt, so daß wenn AH parallel DC, jede Linie AF die DC schneidet, wie klein auch immer der Winkel HAF sein mag.

17) Eine gerade Linie behält das Kennzeichen des Parallelismus in allen ihren Punkten.

Es sei AB (Fig. 2.) parallel mit CD, auf welcher letztern AC perpendikulär ist. Wir wollen zwei Punkte betrachten, welche beliebig auf der Linie AB und ihrer Verlängerung jenseits des Perpendikels genommen sind. Es liege der Punkt E auf derjenigen Seite des Perpendikels, auf welcher AB als parallel mit CD angesehen wird. Es werde aus dem Punkte E ein Perpendikel EK auf CD gefällt, hierauf werde EF so gezogen, daß sie innerhalb des Winkels BEK fällt. Man verbinde die Punkte A und F durch eine gerade Linie, deren Verlängerung die CD irgendwo in G schneiden muß (16. Satz). Hierdurch erhält man ein Dreieck ACG, in welches die Linie EF hineingeht; da letztere nun nicht AC schneiden kann, in Folge der Construction, und eben so wenig

AG und EK zum zweiten Male (Satz 2.) so muß sie CD irgendwo treffen in H (Satz 3.)

Es sei jetzt E′ ein Punkt auf der Verlängerung von AB und E′K′ perpendikulär auf die Verlängerung der Linie CD, man ziehe die Linie E′F′ unter einem so kleinen Winkel A′E′F′, daß sie AC irgendwo in F′ schneide, unter demselben Winkel mit AB ziehe man noch aus A die Linie AF, deren Verlängerung CD in G schneiden wird, (16. Satz). Dergestalt erhält man ein Dreieck AGC, in welches die Verlängerung der Linie E′F′ hineingeht; da nun diese Linie nicht zum zweiten Male AE schneidet, aber auch nicht AG schneiden kann, weil der Winkel BAG = BE′G′ (7. Satz), so muß sie CD irgendwo in G′ treffen.

Von welchen Punkten E und E′ also die Linien EF und E′F′ auch ausgehen und wie wenig sie auch von der Linie AB abweichen mögen, so werden sie doch stets CD schneiden, zu welcher AB parallel ist.

18. Zwei Linien sind stets wechselseitig parallel.

Es sei AC ein Perpendikel auf CD (Fig. 3), mit welcher AB parallel ist; man ziehe aus

C die Linie CE unter irgend einem spitzen Winkel ECD mit CD, und fälle aus A den Perpendikel AF auf CE, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck ACF, worin die Hypothenuse AC größer als die Cathete AF (9te Satz). Man mache AF=AG und lege AF auf AG, so werden AB und FE die Lage AK und GH annehmen, dergestalt daß Winkel BAK=FAC, folglich muß AK die Linie DC irgendwo in K schneiden (16ter Satz), wodurch ein Dreieck AKC entsteht, innerhalb welches der Perpendikel GH mit der Linie AK in L zusammentrifft (3ter Satz) und dergestalt die Entfernung AL des Durchschnittspunktes der beiden Linien AB und CE auf der Linie AB vom Punkte A aus bestimmt.

Hieraus folgt, daß CE stets AB schneiden wird, wie klein auch immer der Winkel ECD sein mag, mithin ist CD parallel AB (16ter Satz).

19. Im geradlinigten Dreiecke kann die Summe der drei Winkel nicht größer als zwei Rechte sein.

Gesetzt es sei im Dreiecke ABC (Fig. 4.) die Summe der drei Winkel $\pi+\alpha$, so wähle man im Falle der Ungleichheit der Seiten die kleinste BC, halbire sie in D, ziehe aus A durch D die Linie AD und mache die Verlängerung derselben, DE, gleich AD, hierauf verbinde man den Punkt E durch die gerade Linie EC mit dem Punkte C. In den congruenten Dreiecken ADB und CDE ist der Winkel ABD = DCE und BAD = DEC (6ter und 10ter Satz); hieraus folgt, daß auch im Dreiecke ACE die Summe der drei Winkel gleich $\pi + \alpha$ sein muß, außerdem ist der kleinste Winkel BAC (9ter Satz) des Dreiecks ABC übergegangen in das neue Dreieck ACE, wobei er in die zwei Theile EAC und AEC zerlegt wurde. Auf diese Weise fortfahrend, indem man stets die Seite halbirt, welche dem kleinsten Winkel gegenüber liegt, muß man endlich zu einem Dreiecke gelangen, in welchem die Summe der drei Winkel $\pi + \alpha$ ist, worin sich aber zwei Winkel befinden, deren jeder, seiner absoluten Größe nach, kleiner als $\frac{1}{2}\alpha$ ist; da nun aber der dritte Winkel nicht größer als $\pi$ sein kann, so muß $\alpha$ entweder Null oder negativ sein.

20) Wenn in irgend einem geradlinigen Dreiecke die Summe der drei

Winkel gleich zweien rechten ist, so ist dieß auch für jedes andere Dreieck der Fall.

Es sei im geradlinigen Dreiecke ABC (Fig. 5) die Summe der drei Winkel $= \pi$, so müssen wenigstens zwei Winkel desselben A und C, spitze sein. Man fälle aus dem Scheitel des dritten Winkels B auf die gegenüberliegende Seite AC den Perpendikel p, so wird dieser das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige zerlegen, in jedem von welchen die Summe der drei Winkel ebenfalls $\pi$ sein muß, damit sie nicht in einem von beiden größer als $\pi$ und im zusammengesetzten nicht kleiner als $\pi$ werde. So erhält man ein rechtwinkliches Dreieck, dessen Catheten p und q, und hieraus ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten gleich und die aneinander anliegenden p und q senkrecht sind (Fig. 6). Durch Wiederholung dieses Vierecks kann man ein ähnliches mit den Seiten np und q, und endlich ein Viereck ABCD mit untereinander senkrechten Seiten bilden, so daß $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, wo m und n beliebige ganze Zahlen sind. Ein solches Viereck wird durch die Diagonale BD in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke BAD und BCD getheilt, von welchen in jedem die Summe der drei Winkel $= \pi$ ist. Die Zahlen n und m können hinreichend groß genommen werden, damit das rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 7) dessen Catheten AB $=$ np, BC $=$ mq, ein anderes gegebenes Dreieck BDE in sich schließe, sobald die rechten Winkel einander decken. Man ziehe die Linie DC, so erhält man dazu rechtwinklige Dreiecke von denen je zwei auf einanderfolgende eine Seite gemein haben. Das Dreieck ABC entsteht aus der Vereinigung der beiden Dreiecke ACD und DCB, in deren jedem die Summe der drei Winkel nicht größer als $\pi$ sein kann; sie muß folglich gleich $\pi$ sein, damit diese Summe im zusammengesetzten Dreiecke gleich $\pi$ werde. Auf gleiche Weise besteht das Dreieck BDC aus den zwei Dreiecken DEC und DBE, folglich muß in DBE die Summe der drei Winkel gleich $\pi$ sein, und überhaupt muß dieß für jedes Dreieck stattfinden, weil jedes in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.

Hieraus folgt, daß nur zwei Annahmen

zulässig sind: entweder ist die Summe der drei Winkel in allen geradlinigen Dreiecken gleich $\pi$, oder diese Summe ist in allen kleiner als $\pi$.

21) Von einem gegebenen Punkte kann man stets eine gerade Linie dergestalt ziehen, daß sie mit einer gegebenen geraden einen beliebig kleinen Winkel bilde.

Man fälle vom gegebenen Punkte A (Fig. 8.) auf die gegebene BC den Perpendikel AB, nehme auf BC willkührlich den Punkt D, ziehe die Linie AD, mache DE = AD und ziehe AE. Es sei im rechtwinkligen Dreieck ABD der Winkel ADB = $\alpha$; so muß im gleichschenkligen Dreieck ADE der Winkel AED entweder $\frac{1}{2}\alpha$ oder kleiner sein. (Satz 8. und 20.) Dergestalt fortfahrend gelangt man endlich zu einem solchen Winkel AEB, der kleiner als jeder gegebene ist.

22) Sind zwei Perpendikel auf einer und derselben geraden Linie unter sich parallel, so ist in den geradlinigen Dreiecken die Summe der drei Winkel gleich $\pi$.

Es seien die Linien AB und CD (Fig. 9.)

parallel unter sich und perpendikulär auf AC. Man ziehe aus A die Linien AE und AF nach den Punkten E und F, welche auf der Linie CD in beliebigen Entfernungen FC > EC vom Punkte C angenommen sind. Gesetzt es sei im rechtwinkligen Dreiecke ACE die Summe der drei Winkel gleich $\pi - \alpha$, im Dreiecke AEF gleich $\pi - \beta$, so wird sie im Dreiecke ACF gleich $\pi - \alpha - \beta$ sein müssen, wo $\alpha$ und $\beta$ nicht negativ sein können. Es sei ferner der Winkel BAF = a, AFC = b, so ist $\alpha + \beta = a - b$; indem man nun die Linie AF sich vom Perpendikel AC entfernen läßt, kann man den Winkel a zwischen AF und der Parallele AB so klein machen als man nur will, ebenso kann man den Winkel b vermindern, folglich können die zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ keine andere Größe haben als $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

Demnach ist in allen geradlinigen Dreiecken die Summe der drei Winkel entweder $\pi$ und zugleich auch der Parallel-Winkel $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ für jede Linie p, oder für alle Dreiecke ist diese Summe $< \pi$ und zugleich auch $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Die erste Voraussetzung dient als Grundlage der gewöhnlichen Geometrie und der ebenen Trigonometrie. Die zweite Voraussetzung kann ebenfalls zugelassen werden, ohne auf irgend einen Widerspruch in den Resultaten zu führen, und begründet eine neue geometrische Lehre, welcher ich den Namen: Imaginäre Geometrie" gegeben habe, und welche ich hier darzustellen beabsichtige, bis zur Entwickelung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln der geradlinigen und sphärischen Dreiecke.

23) Für jeden gegebenen Winkel $\alpha$ kann man eine Linie p finden, so daß $\Pi(p) = \alpha$.

Es seien AB und AC (Fig. 10.) zwei gerade Linien, welche am Durchschnittspunkte A den spitzen Winkel $\alpha$ bilden; man nehme auf AB willkührlich einen Punkt B', aus diesem Punkte fälle man B'A' senkrecht auf AC, mache A'A'' = AA', errichte in A'' die senkrechte A''B'', und fahre so fort bis man zu einem Perpendikel CD gelangt, welcher mit AB nicht mehr zusammentrifft. Dies muß nothwendig statt finden, denn wenn im Dreiecke AA'B' die Summe aller drei Winkel gleich $\pi - a$ ist, so wird sie im Dreiecke AB'A'' gleich $\pi - 2a$, im Dreiecke AA''B'' kleiner als $\pi - 2a$ (20. Satz) sein, und so fort, bis sie endlich negativ wird und dadurch die Unmöglichkeit der Dreieckbildung zeigt. Die Senkrechte CD kann dieselbe sein, von welcher aus näher zum Punkte A alle übrigen AB schneiden; wenigstens muß bei dem Uebergange von den einen schneidenden zu den nicht schneidenden ein solcher Perpendikel FG existiren. Man ziehe jetzt aus dem Punkte F die Linie FH, die mit FG den spitzen Winkel HFG bildet, und zwar nach der Seite hin, wo der Punkt A liegt. Von irgend einem Punkte H der Linie FH fälle man auf AC den Perpendikel HK, dessen Verlängerung folglich AB irgendwo in B schneiden muß, und dergestalt ein Dreieck AKB bildet, in welches die Verlängerung der Linie FH eintritt, und daher irgendwo in M die Hypothenuse AB treffen muß. Da der Winkel GFH willkührlich ist und so klein angenommen werden kann, als man will, so ist FG mit AB parallel und AF = p. (16. und 18. Satz.)

Man sieht leicht ein, daß mit der Verminderung von p der Winkel $\alpha$ wächst, indem er sich für p = o dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ nähert; mit der Zunahme von p vermindert sich der Winkel $\alpha$, indem er sich immer mehr der Null nähert für $p = \infty$. Da es ganz beliebig ist, welchen Winkel man unter dem Zeichen $\Pi(p)$ verstehen will, wenn die Linie p durch eine negative Zahl ausgedrückt wird, so wollen wir

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$$

annehmen, eine Gleichung, welche für alle Werthe von p, positive sowohl als negative, und für $p = 0$, gelten soll.

24) Je weiter Parallel-Linien auf der Seite ihres Parallelismus verlängert werden, desto mehr nähern sie sich einander.

Es seien auf die Linie AB (Fig. 11.) zwei Perpendikel AC = BD errichtet, und ihre Endpunkte C und D durch eine gerade Linie verbunden, so wird das Viereck CABD bei A und B zwei rechte, bei C und D aber zwei spitze Winkel haben (22. Satz), welche einander gleich sind, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man sich das Viereck auf sich selbst gelegt denkt, so daß die Linie BD auf AC und AC auf BD fällt. Man halbire AB und errichte im Halbirungspunkte E die Linie EF senkrecht auf AB, welche zugleich auch senkrecht auf CD sein muß, weil die Vierecke CAEF und FEBD einander decken, wenn man sie so auf einander legt, daß die Linie FE in derselben Lage bleibt. Demnach kann die Linie CD nicht parallel mit AB sein, sondern die Parallele der letztern für den Punkt C, nämlich CG, muß sich auf die Seite von AB hin neigen (16. Satz), und schneidet vom Perpendikel BD einen Theil BG < CA ab. Da der Punkt C in der Linie CG willkührlich ist, so folgt, daß CG sich der AB um so mehr nähert, je weiter sie verlängert wird.

25) Zwei gerade Linien, die einer dritten parallel sind, sind auch parallel unter sich.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die drei Linien AB, CD, EF, (Fig. 12.) in einer Ebene liegen. Wenn zwei derselben, der Ordnung nach AB und CD, parallel mit der äußersten EF sind, so sind auch AB und CD parallel unter sich. Um dies darzuthun, fälle man aus irgend einem Punkte A der äußersten Linie AB auf die andere äußerste FE den Perpendikel AE, welcher die mittlere Linie CD in irgend einem Punkte C schneiden wird (3. Satz) unter einem Winkel DCE < $\frac{1}{2}\pi$ auf der Seite der mit CD parallelen EF. (22. Satz.) Ein Perpendikel AG aus demselben Punkte A auf CD gefällt, muß innerhalb der Oeffnung des spitzen Winkels ACG fallen (9. Satz), jede andere Linie AH aus A innerhalb des Winkels BAC gezogen, muß die mit AB parallele EF irgendwo in H schneiden, wie klein auch immer der Winkel BAH sein mag, folglich wird CD im Dreiecke AEH die Linie AH irgendwo in K schneiden, da es unmöglich ist, daß sie mit EF zusammentreffe. Wenn AH vom Punkte A innerhalb des Winkels CAG ausginge, so würde sie die Verlängerung von CD zwischen den Punkten C und G im Dreiecke CAG schneiden müssen. Hieraus folgt, daß AB und CD parallel sind. (16. und 18. Satz) Werden die beiden äußern Linien AB und EF parallel der mittleren CD angenommen, so wird jede Linie AK aus dem Punkte A innerhalb des Winkels BAE gezogen, die Linie CD irgendwo im Punkte K schneiden, wie klein auch immer der Winkel BAK sein mag. Auf der Verlängerung von AK nehme man beliebig einen Punkt L und verbinde ihn mit C durch die Linie CL, welche EF irgendwo in M schneiden muß, wodurch ein Dreieck MCE gebildet wird. Die Verlängerung der Linie AL innerhalb des Dreiecks MCE kann weder AC noch CM zum zweiten Male schneiden, folglich muß sie EF irgendwo in H treffen, mithin sind AB und EF wechselseitig parallel.

Es mögen jetzt die Parallelen AB und CD (Fig. 13.) in zwei Ebenen liegen, deren Durchschnittslinie EF ist. Aus einem beliebigen Punkte E dieser letztern fälle man einen Perpendikel EA auf eine der beiden Parallelen, z. B. auf AB, hierauf aus A, dem Fußpunkte der senkrechten EA, fälle man einen neuen Perpendikel AC auf die andere Parallele CD und vereinige die Endpunkte E und C der beiden Perpendikel durch die Linie EC. Der Winkel BAC muß ein spitzer sein (22. Satz), folglich fällt ein Perpendikel CG, aus C auf AB gefällt, in den Punkt G auf dieselbe Seite von CA, auf welcher die Linien AB und CD als parallel betrachtet werden. Jede Linie EH, wie wenig sie auch immer von EF abweichen mag, gehört mit der Linie EC einer Ebene an, welche die Ebene der zwei Parallelen AB und CD längs irgend einer Linie CH schneiden muß. Diese letztere Linie schneidet AB irgendwo und zwar in demselben Punkte H, der allen drei Ebenen gemein ist, durch welchen nothwendig auch die Linie EH geht; folglich ist EF parallel mit AB. Auf ähnliche Weise läßt sich der Parallelismus von EF und CD zeigen.

Die Voraussetzung, daß eine Linie EF parallel sei, mit einer von zwei andern unter sich parallelen AB und CD, heißt demnach nichts anders als EF als den Durchschnitt solcher Ebenen betrachten, in welchen zwei Parallelen AB, CD liegen. Demnach sind zwei Linien parallel unter sich, wenn sie parallel ein und derselben dritten sind, obgleich sie in verschiedenen Ebenen liegen. Der letzte Satz kann auch so ausgesprochen werden: Drei Ebenen schneiden sich in Linien, welche alle parallel unter sich sind, sobald der Parallelismus von zweien derselben vorausgesetzt wird.

26) Einander gegenüber stehend

**Dreiecke auf der Kugeloberfläche haben gleichen Flächeninhalt.**

Unter gegenüberstehenden Dreiecken werden hier solche verstanden, die gebildet werden durch die Durchschnitte der Kugelfläche mit Ebenen auf beiden Seiten des Centrums; in solchen Dreiecken haben daher die Seiten und Winkel eine entgegengesetzte Richtung.

In den einander gegenüberstehenden Dreiecken ABC und A′B′C′ (Fig. 14., wo eines derselben als umgekehrt dargestellt angesehen werden muß,) sind die Seiten AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′ und die entsprechenden Winkel an den Punkten A, B, C sind ebenfalls gleich denen im andern Dreiecke an den Punkten A′, B′, C′. Durch die 3 Punkte A, B, C denke man sich eine Ebene gelegt und auf dieselbe aus dem Mittelpunkte der Kugel einen Perpendikel gefällt, dessen Verlängerungen nach beiden Seiten hin die beiden einander gegenüberstehenden Dreiecke in den Punkten D und D′ der Kugeloberfläche schneiden werden. Die Abstände des Punktes D von den Punkten A, B, C, auf der Sphäre in Bögen des größten Kreises, müssen gleich sein (12. Satz), sowohl unter sich, als auch mit den Abständen D'A', D'B', D'C', auf dem andern Dreiecke (6. Satz.), folglich sind die gleichschenkligen Dreiecke um um den Punkten D und D' in beiden sphärischen Dreiecken ABC und A'B'C' congruent.

Um über die Gleichheit zweier Oberflächen überhaupt zu urtheilen, nehme ich folgenden Satz als Grundlage an: Zwei Oberflächen sind gleich, wenn sie durch Zusammenfügung oder Trennung gleicher Theile entstehen.

27) Ein dreiseitiger Körperwinkel ist gleich der halben Summe der Flächenwinkel weniger einem Rechten.

Im sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 15.), wo jede Seite $< \pi$, bezeichne man die Winkel mit A, B, C, verlängere die Seite AB, daß ein ganzer Kreis ABA'B'A entsteht, welcher die Sphäre in zwei gleiche Theile theilt. In derjenigen Hälfte, in welcher sich das Dreieck ABC befindet, verlängere man noch die anderen beiden Seiten durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt C, bis sie den Kreis in A' und B' treffen. Dergestalt wird die halbe Sphäre in vier Dreiecke ABC, ACB′, B′CA′, A′CB getheilt, deren Größen P, X, Y, Z sein mögen. Es leuchtet ein, daß hier

$$P + X = B$$
$$P + Z = A$$

Die Größe des sphärischen Dreiecks Y ist gleich der des ihm gegenüberstehenden Dreiecks ABC′, dessen Seite AB gemein ist mit dem Dreiecke P und dessen dritter Winkel C′ am Endpunkte des Durchmessers der Sphäre liegt, der von C durch das Centrum D der Sphäre geht. (26. Satz.) Hieraus folgt, daß $P + Y = C$ und weil $P + X + Y + Z = \pi$, so hat man auch:

$$P = \tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi)$$

Zu demselben Schlusse kann man noch auf andere Weise gelangen, indem man sich allein auf den Satz stützt, welcher oben über die Gleichheit der Flächen angeführt wurde. (26. Satz.)

Im sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 16.) halbire man die Seiten AB und BC und durch die Halbirungspunkte D und E lege man einen größten Kreis, auf diesen fälle man aus A, B, C die Perpendikel AF, BH und CG. Wenn der Perpendikel aus B in H zwischen D und E fällt, so wird das entstehende Dreieck BDH gleich AFD, und BHE gleich EGC sein (6. und 15. Satz.), woraus folgt, daß die Oberfläche des Dreiecks ABC gleich der des Vierecks AFGC (26. Satz.). Wenn der Punkt H mit dem Mittelpunkte E der Seite BC zusammenfällt (Fig. 17.), so werden nur zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke AFD und BDE entstehen, durch deren Verwechselung man die Gleichheit der Oberflächen des Dreiecks ABC und Vierecks AFEC nachweist. Wenn endlich der Punkt H außerhalb des Dreiecks ABC fällt, (Fig. 18.) der Perpendikel CG folglich durch das Dreieck geht, so wird man vom Dreiecke ABC zum Viereck AFGC übergehen, indem man das Dreieck FAD = DBH hinzufügt, und hierauf das Dreieck CGE = EBH hinwegnimmt. Denkt man sich im sphärischen Vierecke AFGC durch die Punkte A und G, so wie durch F und C größte Kreise gelegt, so sind die Bögen derselben zwischen AG und FC einander gleich, (15. Satz) mithin auch die Dreiecke FAC und ACG congruent (15. Satz.) und der Winkel FAC gleich dem Winkel ACG.

Hieraus folgt, daß in allen vorhergehenden Fällen die Summe aller drei Winkel des sphärischen Dreiecks gleich ist der Summe der beiden gleichen Winkel im Vierecke, mit Ausschluß der beiden rechten. Demnach kann man für jedes sphärische Dreieck, in welchem die Summe der drei Winkel S ist, ein Viereck mit gleicher Oberfläche finden, in welchem zwei rechte Winkel und zwei gleiche perpendikuläre Seiten sind, und wo die beiden andern Winkel jeder $\frac{1}{2}$ S ist.

Es sei jetzt **ABCD** (Fig. 19.) das sphärische Viereck, wo die Seiten **AB** = **DC** senkrecht auf **AB** und die Winkel bei **A** und **D** jeder $\frac{1}{2}$ S. Man verlängere die Seiten **AD** und **BC** bis sie sich in **E** schneiden, und weiter jenseits **E**, mache **DE** = **EF** und fälle auf die Verlängerung von **BC** den Perpendikel **FG**. Den ganzen Bogen **BG** halbire man und verbinde den Halbirungspunkt **H** durch Bögen des größten Kreises mit **A** und **F**. Die Dreiecke **EFG** und **DCE** sind congruent (15. Satz.), mithin ist **FG** = **DC** = **AB**. Die Dreiecke **ABH** und **HGF** sind ebenfalls congruent, weil sie rechtwinklig sind und gleiche Catheten haben, folglich gehören **AH** und **AF** zu einem Kreise, der Bogen AHF ist gleich $\pi$, ADEF ebenfalls $= \pi$, der Winkel HAD $=$ HFE $= \frac{1}{2}$ S $-$ BAH $= \frac{1}{2}$ S $-$ HFG $= \frac{1}{2}$ S $-$ HFE $-$ EFG $= \frac{1}{2}$ S $-$ HAD $- \pi + \frac{1}{2}$ S, folglich: Winkel HFE $= \frac{1}{2}$ (S $- \pi$.), oder was dasselbe ist: gleich der Größe des Ausschnitts AHFDA, welche wiederum dem Vierecke ABCD gleich ist, wie man leicht sieht, wenn man von dem einen zum andern übergeht, indem man zuerst das Dreieck EFG und alsdann BAH hinzufügt, und darauf die ihnen gleichen Dreiecke DCE und HFG wegnimmt. Demnach ist $\frac{1}{2}$ (S $- \pi$) die Größe des Vierecks ABCD und zugleich auch die des sphärischen Dreiecks, in welchem die Summe der drei Winkel gleich S.

28) Wenn drei Ebenen sich in parallelen Linien schneiden, so ist die Summe der drei Flächenwinkel gleich zweien Rechten.

Es seien AA′, BB′, CC′, (Fig. 20.) drei durch die Durchschnitte von Ebenen gebildete Parallellinien. (25. Satz.) Man nehme auf ihnen willkührlich drei Punkte A, B, C, und denke sich durch diese eine Ebene gelegt, welche folglich die Ebenen der Parallelen längs den geraden Linien AB, AC und BC schneiden wird. Ferner lege man durch die Linie AC und irgend einen Punkt D auf der Linie BB′, noch eine Ebene, deren Durchschnitte mit den zwei Ebenen der Parallelen AA; und BB′, CC′ und BB′, die beiden Linien AD und DC erzeugt, und deren Neigung zur dritten Ebene der Parallelen AA′ und CC′ wir durch w bezeichnen wollen. Die Winkel zwischen den drei Ebenen, in welchen die Parallelen liegen, sollen durch X, Y, Z, bezeichnet werden, in Beziehung auf die Linien AA′, BB′ und CC′; endlich seien die Linear-Winkel BDC = a. ADC = b, ADB = c. Um A als Mittelpunkt denke man sich eine Kugelfläche beschrieben, auf welcher die Durchschnitte der Geraden AC, AD, AA′, mit derselben ein sphärisches Dreieck bestimmen, mit den Seiten p, q und r, dessen Größe $\alpha$ sein mag, und wo die Winkel: w der Seite q, X der Seite r, und folglich $\pi + 2a - w - X$ der Seite p gegenüber liegt, (27. Satz.). Auf gleiche Weise schneiden CA, CD, CC′ eine Kugeloberfläche um den Mittelpunkt C, und bestimmen ein

Dreieck von der Größe $\beta$, mit den Seiten p', q', r' und den Winkeln: w gegenüber q', Z gegenüber r', und folglich $\pi + 2\beta - w - Z$ gegenüber p'. Endlich wird durch die Durchschnitte einer Kugelfläche um D mit den Linien DA, DB, DC ein sphärisches Dreieck bestimmt, dessen Seiten l, m, n und die ihnen gegenüberliegenden Winkel $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$, und Y sind, dessen Größe folglich $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. Mit der Abnahme von w vermindert sich auch die Größe der Dreiecke $\alpha$ und $\beta$, dergestalt, daß $\alpha + \beta - w$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Zahl. Im Dreiecke $\delta$ können die Seiten l und m ebenfalls bis zum Verschwinden verkleinert werden, (21. Satz.) folglich kann das Dreieck $\delta$ mit einer seiner Seiten l oder m auf einen größten Kreis der Sphäre so oft gelegt werden, als man nur will, ohne daß dadurch die Hälfte der Sphäre ausgefüllt würde, mithin verschwindet $\delta$ zugleich mit w; woraus folgt, daß nothwendig $X + Y + Z = \pi$ sein muß.

29) Im geradlinigen Dreiecke treffen sich die Perpendikel, welche in der

Mitte der Seiten errichtet sind, entweder nicht, oder sie schneiden sich alle drei in einem Punkte.

Vorausgesetzt in dem Dreiecke ABC (Fig. 21.) schnitten sich die beiden Perpendikel ED und DF, welche auf den Seiten AB und BC in deren Mittelpunkten E und F errichtet sind, im Punkte D, so ziehe man innerhalb der Winkel des Dreiecks die Linien DA, DB, DC.

In den congruenten Dreiecken ADE und BDE (10. Satz.) ist AD = BD, ebenso folgt auch, daß BD = CD; das Dreieck ADC ist mithin gleichschenklig, folglich fällt der Perpendikel vom Scheitel D auf die Grundlinie AC gefällt, in den Mittelpunkt der letztern G.

Der Beweis bleibt unverändert auch in dem Falle, wenn der Durchschnittspunkt D der beiden Senkrechten ED und FD in die Linie AC selbst, oder außerhalb des Dreiecks fällt.

Im Falle man also annimmt, daß zwei jener Perpendikel sich nicht schneiden, kann auch der dritte nicht mit ihnen zusammentreffen.

30) Die Perpendikel, welche auf den Seiten eines geradlinigen Dreiecks in ihrer Mitte errichtet sind, müssen alle

drei unter sich parallel sein, sobald als der Parallelismus von zweien derselben vorausgesetzt wird.

Es seien in dem Dreiecke ABC (Fig. 22.) die Linien DE, FG, HK senkrecht auf den Seiten errichtet, in ihren Mittelpunkten D, F, H. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß die beiden Perpendikel DE und FG parallel seien, welche die Linie AB in L und M schneiden werden, und daß sich der Perpendikel HK zwischen ihnen befinde. Innerhalb des Winkels BLE ziehe man aus dem Punkte L beliebig die gerade Linie LG, welche FG irgendwo in G schneiden muß, wie klein auch immer der Abweichungswinkel GLE sein mag. (16. Satz.) Da im Dreiecke LGM der Perpendikel HK nicht mit MG zusammentreffen kann, (29. Satz), so muß er also LG irgendwo in P schneiden, woraus folgt, daß HK parallel mit DE (16. Satz.) und MG (18. und 25. Satz) sein muß.

Setzt man die Seite BC = 2a, AC = 2b, AB = 2c und bezeichnet die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel durch A, B, C, so ist in dem so eben betrachteten Falle

$$A = \Pi(b) - \Pi(c)$$

$$B = \Pi(a) - \Pi(c)$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b)$$

wie man sich leicht überzeugt mit Hülfe der Linien AA′, BB′, CC′, welche aus den Punkten A, B, C parallel mit dem Perpendikel HK und folglich mit den beiden andern Perpendikeln DE und FG gezogen sind (23. und 25. Satz.).

Es seien jetzt die beiden Perpendikel HK und FG parallel, so kann der dritte DE sie nicht schneiden (29. Satz.), mithin ist er entweder parallel mit ihnen, oder er schneidet AA′. Die letzte Annahme heißt nichts anderes, als daß der Winkel $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Vermindert man diesen Winkel, so daß er gleich $\Pi(a) + \Pi(b)$ wird, indem man dergestalt der Linie AC die neue Lage CQ giebt, (Fig. 23.) und bezeichnet man die Größe der dritten Seite BQ durch $2c'$, so muß der Winkel CBQ am Punkte B, welcher vergrößert wurde, nachdem was oben bewiesen ist, gleich $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$ sein, woraus folgt $c' > c$ (23. Satz.) Im Dreiecke ACQ sind jedoch die Winkel bei A und Q gleich, mithin muß im Dreiecke ABQ der Winkel bei Q größer sein als der am Punkte A, folglich ist AB $>$ BQ (9. Satz.); das heißt es ist $c > c'$.

31) Grenzlinie (Oricycle) nennen wir diejenige in einer Ebene liegende krumme Linie, für welche alle Perpendikel auf den Mittelpunkten der Sehnen errichtet unter sich parallel sind.

In Uebereinstimmung mit dieser Definition kann man sich die Erzeugung der Grenzlinie vorstellen, wenn man zu einer gegebenen Linie AB (Fig. 24.) aus einem in ihr gegebenen Punkte A unter verschiedenen Winkeln CAB $= \Pi(a)$ Sehnen AC $= 2a$ zieht; das Ende C einer solchen Sehne wird auf der Grenzlinie liegen, deren Punkte man so allmählich bestimmen kann. Der Perpendikel DE auf der Sehne AC in deren Mitte D errichtet, wird parallel mit der Linie AB sein, welche wir Axe der Grenzlinie nennen werden. Auf gleiche Weise wird auch jeder Perpendikel FG im Mittelpunkte irgend einer Sehne AH errichtet, parallel mit AB sein, folglich muß diese Eigenschaft auch jedem Perpendikel KL überhaupt angehören, welcher im Mittelpunkte K irgend einer Sehne CH errichtet ist, zwischen welchen Punkten C und H, auf der Grenzlinie diese auch gezogen sein mag. (30. Satz.) Dergleichen Perpendikel müssen daher ebenfalls ohne Unterscheidung von AB Axen der Grenzlinie genannt werden.

32) Ein Kreis, dessen Halbmesser wächst, geht in die Grenzlinie über.

Es sei AB (Fig. 25.) eine Sehne der Grenzlinie, man ziehe aus den Endpunkten A und B der Sehne zwei Axen AC und BD, welche folglich mit der Sehne zwei gleiche Winkel BAC = ABD = $\alpha$ bilden werden, (31. Satz.) Auf einer dieser Axen AC, nehme man irgendwo den Punkt E als Mittelpunkt eines Kreises an, und ziehe den Kreisbogen AF vom Anfangspunkt A der Axe AC bis zu seinem Durchschnittspunkte F mit der andern Axe BD. Der dem Punkte F entsprechende Halbmesser FE des Kreises wird auf der einen Seite mit der Sehne AF einen Winkel AFE = $\beta$ und auf der andern Seite mit der Axe BD den Winkel EFD = $\gamma$ bilden. Es ergiebt sich, daß der Winkel zwischen den beiden Sehnen BAF = $\alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (22. Satz.), woraus folgt: $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Da nun aber der Winkel $\gamma$ sich bis zu Null vermindert, sowohl in Folge einer Bewegung des Mittelpunkts E in der Richtung AC, wenn F unverändert bleibt (21. Satz.), als auch in Folge einer Annäherung von F an B auf der Axe BF, wenn der Mittelpunkt E in seiner Lage bleibt (22. Satz.), so folgt, daß mit einer solchen Verminderung des Winkels $\gamma$ auch der Winkel $\alpha - \beta$, oder die gegenseitige Neigung der zwei Sehnen AB und AF, und mithin auch der Abstand des Punktes B auf der Grenzlinie vom Punkte F auf dem Kreise, verschwindet. Demnach kann man auch die Grenzlinie einen Kreis mit unendlich großem Halbmesser nennen.

33) Es seien $AA' = BB' = x$ (Fig. 26.) zwei nach der Seite von A zu A′ hin parallele Linien, deren Parallelen den zwei Grenz-Bögen, (Bögen auf zwei Grenzlinien), $AB = s$, $A'B' = s'$, als Axen dienen, so ist

$$s' = se^{-x}$$

wo e unabhängig ist von den Bögen s, s′ und von Geraden x, dem Abstande des Bogens s′ von s.

Um dies zu beweisen, nehme man an, daß das Verhältniß des Bogens s zu s′ gleich sei dem Verhältnisse der beiden ganzen Zahlen n und m. Zwischen den beiden Axen $AA'$, $BB'$ ziehe man noch eine dritte Axe $CC'$, welche dergestalt von dem Bogen $AB$ einen Theil $AC = t$ und von dem Bogen $A'B'$ auf derselben Seite einen Theil $A'C' = t'$ abschneidet. Es sei das Verhältniß des $t$ zu $s$ gleich dem der beiden ganzen Zahlen $p$ und $q$, so daß

$$s = \frac{n}{m} s' \quad t = \frac{p}{q} s$$

Man theile jetzt $s$ durch Axen in $nq$ gleicher Theile, so werden solcher Theile $mq$ auf $s'$ und $np$ auf $t$ sein. Inzwischen entsprechen diese gleichen Theile auf $s$ und $t$ ebenfalls gleichen Theilen auf $s'$ und $t'$, folglich hat man

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}$$

Wo demnach auch immer die beiden Bögen $t$ und $t'$ zwischen den zwei Axen $AA'$ und $BB'$ genommen sein mögen, stets bleibt das Verhältniß von $t$ zu $t'$ dasselbe, so lange der Abstand $x$ zwischen ihnen derselbe bleibt. Wenn man daher für $x = 1$, $s = es'$ setzt, so muß für jedes $x$:

$$s' = se^{-x}$$

sein.

Da e eine unbekannte Zahl und nur der Bedingung $e > 1$ unterworfen ist, ferner die Einheit der Linie für $x$ beliebig angenommen werden kann, so kann man dieselbe zur Vereinfachung der Rechnung so wählen, daß unter $e$ die Basis der Neper'schen Logarithmen zu verstehen ist.

Man kann hier noch bemerken, daß $s' = o$ für $x = \infty$, mithin vermindert sich nicht nur der Abstand zwischen zwei Parallelen (24. Satz.), sondern bei der Verlängerung der Parallelen nach der Seite des Parallelismus hin verschwindet derselbe zuletzt ganz. Parallel-Linien haben also den Character der Asymptoten.

34) Grenzfläche (Orisphäre) wird diejenige Oberfläche genannt, welche entsteht durch die Umdrehung der Grenzlinie um eine ihrer Axen, die zugleich mit allen übrigen Axen der Grenzlinie auch Axe der Grenzfläche sein wird.

Eine Sehne ist gegen solche durch ihre Endpunkte gezogene Axen unter gleichen Winkeln geneigt, wo auch immer diese zwei Endpunkte auf der Grenzfläche genommen werden mögen.

Es seien A, B, C, (Fig. 27.) drei Punkte auf der Grenzoberfläche, **AA'** die Drehungsaxe, **BB'** und **CC'** zwei andere Axen, folglich **AB** und **AC** Sehnen, gegen welche die Axen unter gleichen Winkeln **A'AB** = **B'BA**, **A'AC** = **C'CA** (31. Satz.) geneigt sind; zwei Axen **BB'**, **CC'** durch die Endpunkte der dritten Sehne **BC** gezogen, sind ebenfalls parallel und liegen in einer Ebene (25. Satz). Ein Perpendikel **DD'**, in der Mitte **D** der Sehne **AB** und der Ebene der beiden Parallelen **AA'**, **BB'** errichtet, muß parallel mit den drei Axen **AA'** **BB'** **CC'** sein, (23. und 25. Satz.); ein eben solcher Perpendikel **EE'** auf der Sehne **AC** in der Ebene der Parallelen **AA'**, **CC'** wird parallel mit den drei Axen **AA'**, **BB'**, **CC'** und dem Perpendikel **DD'** sein. Es werde jetzt der Winkel zwischen der Ebene, in welcher die Parallelen **AA'** und **BB'** liegen, und zwischen der Ebene des Dreiecks **ABC** durch $\Pi(a)$ bezeichnet, wo a positiv, negativ oder Null sein kann. Ist a positiv, so errichte man **FD** = a innerhalb des Dreyecks **ABC**, und in der Ebene desselben, senkrecht auf der Sehne **AB** in deren Mittelpunkte **D**; wäre a eine negative Zahl, so muß **FD** = a außerhalb des Dreiecks auf der andern Seite der Sehne AB gezogen werden; wenn a = o, so fällt der Punkt F mit D zusammen. In allen Fällen entstehen zwei rechtwinklige congruente Dreiecke AFD und DFB, folglich ist FA = FB. Man errichte jetzt in F die Linie FF′ senkrecht auf die Ebene des Dreiecks ABC.

Da der Winkel D′DF = $\Pi$(a), DF = a, so ist FF′ parallel mit DD′ und der Linie EE′, mit welcher sie auch in einer Ebene liegt, die senkrecht auf der Ebene des Dreiecks ABC ist. Denkt man sich jetzt in der Ebene der Parallelen EE′, FF′, auf EF den Perpendikel EK gefällt, so wird dieser auch senkrecht sein, auf der Ebene des Dreiecks ABC (13. Satz.) und auf der in dieser Ebene liegenden Linie AE (11. Satz.), und demnach muß AE, die perpendiculär auf EK und EE′ ist, auch zugleich senkrecht auf FE sein. (11. Satz.) Die Dreiecke AEF und FEC sind congruent, da sie rechtwinklig sind und gleiche Catheten haben, mithin ist AF = FC = FB. Ein Perpendikel aus der Spitze F des gleichschenkligen Dreiecks BFC auf die Grundlinie BC gefällt, geht durch deren Mittelpunkt G; eine Ebene durch diesen Perpendikel FG und die Linie FF′ gelegt, muß senkrecht sein auf die Ebene des Dreiecks ABC und schneidet die Ebene der Parallelen BB′, CC′ längs der Linie GG′, die ebenfalls parallel mit BB′ und CC′ ist (25. Satz.); da nun CG senkrecht auf FG, und mithin zugleich auch auf GG′, so ist folglich der Winkel C′CG = B′BG. (23. Satz.)

Hieraus folgt, daß für die Grenzfläche jede der Axen als Drehungsaxe betrachtet werden kann.

Hauptebene werden wir jede Ebene nennen, welche durch eine Axe der Grenzfläche gelegt ist. Demnach schneidet jede Hauptebene die Grenzfläche in der Grenzlinie, während für eine andere Lage der schneidenden Ebene dieser Durchschnitt ein Kreis ist. Drei Hauptflächen, die sich wechselseitig schneiden, bilden unter einander Winkel, deren Summe $\pi$ ist. (28. Satz.) Diese Winkel werden wir als Winkel im Grenzdreiecke betrachten, dessen Seiten Bögen der Grenzlinie sind, welche auf der Grenzfläche durch die Durchschnitte mit den drei Hauptflächen entstehen. Den Grenzdreiecken kommt folglich dieselbe Abhängigkeit der

Winkel und Seiten unter sich zu, welche in der gewöhnlichen Geometrie für die geradlinigen Dreiecke bewiesen werden.

35) In der Folge werden wir die Größe einer Linie durch einen Buchstaben mit beigesetztem Accent, z. B. $x'$, bezeichnen, um anzudeuten, daß dieselbe zu der einer andern Linie, welche durch denselben Buchstaben ohne Accent $x$ dargestellt wird, eine Beziehung habe, die durch die Gleichung

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \tfrac{1}{2}\pi$$

gegeben ist.

Es sei jetzt ABC (Fig. 28.) ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck, wo die Hypothenuse $AB = c$, die Catheten $AC = b$, $BC = a$ und die ihnen gegenüberliegenden Winkel $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$ sind. Im Punkte A errichte man die Linie AA' senkrecht auf die Ebene des Dreiecks ABC, und aus den Punkten B und C ziehe man BB' und CC' parallel mit AA'. Die Ebenen, in welchen diese drei Parallelen liegen, bilden unter sich die Winkel: $\Pi(\alpha)$ an AA', einen rechten an CC' (11. und 13. Satz.), folglich $\Pi(\alpha')$ bei BB' (28. Satz.).

Die Durchschnitte der Linien BA, BC, BB' mit einer Kugeloberfläche, um den Punkt B als Mittelpunkt beschrieben, bestimmen ein sphärisches Dreieck mnk, worin die Seite mn $= \Pi(c)$, kn $= \Pi(\beta)$, mk $= \Pi(a)$ und die ihnen gegenüberliegenden Winkel $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$, sind.

Demnach muß man mit der Existens eines geradlinigen Dreiecks dessen Seiten a, b, c, und die gegenüberliegenden Winkel $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ sind, auch die eines sphärischen Dreiecks (Fig. 29.) zulaßen, mit den Seiten $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(b)$, $\Pi(a')$, $\frac{1}{2}\pi$.

Bei diesen beiden Dreiecken bedingt aber auch umgekehrt die Existens des sphärischen Dreiecks wiederum die eines geradlinigen, welches folglich auch mit den Seiten a, $\alpha'$, $\beta$, und denen ihnen gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$ sein kann.

Demnach kann man von a, b, c, $\alpha$, $\beta$, übergehen zu b, a, c, $\beta$, $\alpha$ und auch zu a, $\alpha'$, $\beta$, b', c.

Man denke sich durch den Punkt A' (Fig. 28.) mit AA'. als Axe eine Grenzfläche gelegt, welche die beiden andern Axen BB', CC', in

$B''$ und $C''$ schneidet, und deren Durchschnitte mit den Ebenen der Parallelen ein Grenzdreieck bilden, dessen Seiten $B''C'' = p$, $C''A = q$ $B''A = r$ und die ihnen gegenüberliegenden Winkel $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ sind, und wo folglich (34. Satz):

$$p = r \sin. \Pi(\alpha) \quad q = r \operatorname{Cos.} \Pi(\alpha)$$

Man hebe jetzt längs der Linie $BB'$ die Verbindung der drei Hauptflächen auf und schlage dieselben aus einander, daß sie mit allen in ihnen befindlichen Linien in eine Ebene zu liegen kommen, wo folglich die Bögen $p$, $q$, $r$ sich zu einem einzigen Bogen einer Grenzlinie vereinigen werden, die durch den Punkt $A$ geht und $AA'$ zur Axe hat, dergestalt, daß auf der einen Seite liegen werden: die Bögen $q$ und $p$, die Seite $b$ des Dreiecks, die in $A$ senkrecht auf $AA'$ ist, die Axe $CC'$, von der Spitze von $b$ parallel mit $AA'$ und durch $C''$ dem Vereinigungspunkte von $p$ und $q$ gehend, die Seite $a$ senkrecht auf $CC'$ im Punkte $C$, und aus dem Endpunkte derselben die Axe $BB'$ parallel mit $AA'$, die durch den Endpunkt $B''$ des Bogens $p$ geht. Auf der andern Seite von $AA'$ werden liegen: die Seite $c$ senkrecht auf AA′ im Punkte A, und die Axe BB′ parallel AA′, vom Endpunkte von b aus durch den Endpunkt B″ des Bogens r gehend. Die Größe der Linie CC″ hängt von b ab, welche Abhängigkeit wir durch CC″ = f(b) ausdrükken wollen. Auf gleiche Weise wird BB″ = f(c) sein. Wenn man CC′ als Axe nehmend eine neue Grenzlinie vom Punkte C aus bis zu ihrem Durchschnittspunkte D mit der Axe BB′ beschreibt, und den Bogen CD mit t bezeichnet, so ist BD = f(a), BB″ = BD + DB″ = BD + CC″ folglich

$$f(c) = f(a) + f(b)$$

Außerdem bemerken wir, daß (32. Satz.)

$$t = pe^{f(b)} = r \sin. \Pi(\alpha)\ e^{f(b)}$$

Wenn der Perpendikel auf die Ebene des Dreiecks ABC (Fig. 28.) anstatt im Punkte A in B errichtet worden wäre, so würden die Linien c und r dieselben geblieben sein, die Bögen q und t würden sich in t und q, die Geraden a und b in b und a und der Winkel $\Pi(\alpha)$ in $\Pi(\beta)$ verändern, folglich hätte man

$$q = r \sin. \Pi(\beta)\ e^{f(a)}$$

woraus folgt, indem man den Werth von q substituirt,

$$\text{Cos. } \Pi(\alpha) = \text{sin. } \Pi(\beta)\ e^{f(a)}$$

und indem man $\alpha$ und $\beta$ in $b'$ und c verändert:

$$\text{sin. } \Pi(b) = \text{sin. } \Pi(c)\ e^{f(a)}$$

ferner durch Multiplikation mit $e^{f(b)}$

$$\text{sin. } \Pi(b)\ e^{f(b)} = \text{sin. } \Pi(c)\ e^{f(c)}$$

Hieraus folgt auch

$$\text{sin. } \Pi(a)\ e^{f(a)} = \text{sin. } \Pi(b)\ e^{f(b)}$$

Da nun aber die Geraden a und b von einander unabhängig sind, und außerdem $f(b) = o$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ für $b = o$, so ist für jede gerade Linie a

$$e^{-f(a)} = \text{sin. } \Pi(a)$$

demnach:

$$\text{sin. } \Pi(c) = \text{sin. } \Pi(a) \text{ sin. } \Pi(b)$$

$$\text{sin. } \Pi(\beta) = \text{Cos. } \Pi(\alpha) \text{ sin. } \Pi(a)$$

Hieraus erhält man noch durch Veränderung der Buchstaben:

$$\text{sin. } \Pi(\alpha) = \text{Cos. } \Pi(\beta) \text{ sin. } \Pi(b)$$

$$\text{Cos. } \Pi(b) = \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(\alpha)$$

$$\text{Cos. } \Pi(a) = \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(\beta)$$

Wenn man im sphärischen rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 29.) die Seiten $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ durch die Buchstaben a, b, c, A, B, bezeichnet, so nehmen die gefundenen Gleichungen die Form derjenigen an, welche man bekanntlich in der sphärischen Trigonometrie für rechtwinklige Dreiecke beweist, nämlich:

$$\sin. a = \sin. c \sin. A$$
$$\sin. b = \sin. c. \sin. B$$
$$\mathrm{Cos.} A = \mathrm{Cos.} a \sin. B$$
$$\mathrm{Cos.} B = \mathrm{Cos.} b \sin. A$$
$$\mathrm{Cos.} c = \mathrm{Cos.} a \mathrm{Cos.} b.$$

von welchen Gleichungen man übergehen kann zu denen für alle spärische Dreiecke überhaupt. Demnach hängt die sphärische Trigonometrie nicht davon ab, ob in einem geradlinigen Dreiecke die Summe der drei Winkel gleich sei zweien Rechten oder nicht.

36) Wir wollen jetzt auf's Neue das rechtwinklige geradlinige Dreieck ABC (Fig. 31.) betrachten, in welchem die Seiten a, b, c, und die gegenüberliegenden Winkel $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ sind. Man verlängere die Hypothenuse c über den Punkt B hinaus, und mache BD $= \beta$; im Punkte D errichte man auf BD die Senkrechte DD', welche folglich parallel sein wird mit BB', der Verlängerung der Seite a jenseits des Punktes B. Aus dem Punkte A

ziehe man noch mit DD′ die Parallele AA′ welche zugleich auch parallel mit CB′ ist, (25. Satz.) deshalb ist der Winkel $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC = \Pi(b)$ folglich

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta)$$

Wenn man $\beta$ von B aus auf die Hypothenuse c trägt, hierauf im Endpunkte D (Fig. 32.) innerhalb des Dreiecks auf AB die Senkrechte DD′ errichtet, und aus dem Punkte A mit DD′ die Parallele AA′ zieht, so wird BC mit ihrer Verlängerung CC′ die dritte Parallele sein; alsdann ist: Winkel $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c - \beta)$ folglich

$$\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b)$$

Diese letzte Gleichung ist auch dann noch gültig, wenn $c = \beta$ oder $c < \beta$. Wenn $c = \beta$ (Fig. 33.), so ist der Perpendikel AA′ im Punkte A auf AB errichtet parallel der Seite $BC = a$ mit ihrer Verlängerung CC′, folglich ist $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, während auch $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$. (23. Satz.) Wenn $c < \beta$, so fällt das Ende von $\beta$ jenseits des Punktes A in D (Fig. 34.) auf die Verlängerung der Hypothenuse AB. Der hier auf AD errichtete Perpendikel DD′ und die ihm aus A parallele

Linie AA′ wird ebenfalls parallel der Seite BC = a mit ihrer Verlängerung CC′ sein. Hier ist der Winkel DAA′ = $\Pi(\beta - c)$ folglich $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (23. Satz.)

Die Verbindung der beiden gefundenen Gleichungen giebt:

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta)$$

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta)$$

woraus folgt

$$\frac{\text{Cos.}\,\Pi(b)}{\text{Cos.}\,\Pi(\alpha)} = \frac{\text{Cos.}\,[\tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) + \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)]}{\text{Cos.}\,[\tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) - \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)]}$$

Substituirt man hier den Werth, (35. Satz.)

$$\frac{\text{Cos.}\ \Pi(b)}{\text{Cos.}\ (\alpha)\,\Pi} = \text{Cos.}\ \Pi(c)$$

so ergiebt sich

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\,\Pi(c)^2 = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\,\Pi(c - \beta)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\,\Pi(c + \beta)$$

Da hier $\beta$ eine beliebige Zahl ist, weil der Winkel $\Pi(\beta)$ an der einen Seite an c beliebig genommen werden kann zwischen den Grenzen o und $\tfrac{1}{2}\,\pi$, folglich $\beta$ zwischen den Grenzen o und $\infty$, so wird man folgern, indem man der Ordnung nach $\beta = c$, $2c$, $3c$ u. s. w. setzt, daß für jede positive Zahl n:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,\Pi(c)^n = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,\Pi(nc)$$

Betrachtet man n als das Verhältniß zweier Linien x und c und nimmt man an, daß

$$\text{Cot. } \tfrac{1}{2}\, \Pi(c) = e^c$$

so findet man für jede Linie x im Allgemeinen, sie sei positiv oder negativ,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, \Pi(x) = e^{-x}$$

wo e jede beliebige Zahl sein kann, die größer als die Einheit ist, weil $\Pi(x) = o$ für $x = \infty$.

Da die Einheit wodurch die Linien gemessen werden, beliebig ist, so kann man unter e auch die Basis der Neper'schen Logarithmen verstehen.

37) Von den oben (35. Satz.) gefündenen Gleichungen ist es hinreichend, die zwei folgenden zu kennen,

$$\sin. \Pi(c) = \sin. \Pi(a) \sin. \Pi(b)$$
$$\sin. \Pi(\alpha) = \sin. \Pi(b) \text{ Cos. } \Pi(\beta)$$

indem man die letzte auf beide Catheten a und b bezieht, um aus ihrer Verbindung die übrigen zwei (35. Satz.) herzuleiten, ohne Zweideutigkeit der algebraischen Zeichen, da hier alle Winkel spitze sind. Auf ähnliche Weise gelangt man zu den zwei Gleichungen:

1. $\text{tang. } \Pi(c) = \sin. \Pi(\alpha) \text{ tang. } \Pi(a)$
2. $\text{Cos. } \Pi(a) = \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(\beta)$

Wir wollen jetzt ein geradliniges Dreieck betrachten, dessen Seiten a, b, c, (Fig. 35.) und die ihnen gegenüberliegende Winkel A, B, C sind. Wenn A und B spitze Winkel sind, so fällt der Perpendikel p aus der Spitze des Winkels C innerhalb des Dreiecks und theilt die Seite c in zwei Theile, und zwar in den Theil x auf der Seite des Winkels A, und c — x auf der Seite des Winkels B. Dergestalt entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, für welche man durch Anwendung der Gleichung 1., erhält:

$$\text{tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(p)$$

$$\text{tang. } \Pi(b) = \text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(p)$$

welche Gleichungen unverändert bleiben, wenn auch einer der Winkel, z. B. B, ein rechter (Fig. 36.) oder ein stumpfer (Fig. 37.) wäre. Demnach hat man allgemein für jedes Dreieck

$$3. \quad \text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(b)$$

Für ein Dreieck mit spitzen Winkeln A, B, (Fig. 35.) hat man auch noch (2. Gleichung)

$$\text{Cos. } \Pi(x) = \text{Cos. } A \text{ Cos. } \Pi(b)$$

$$\text{Cos. } \Pi(c - x) = \text{Cos. } B \text{ Cos. } \Pi(a)$$

welche Gleichungen sich auch auf Dreiecke beziehen, in denen einer der Winkel A oder B ein rechter oder stumpfer ist. Zum Beispiel für $B = \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 36.) muß $x = c$ genommen werden, die erste Gleichung geht dann in diejenige über, welche wir oben gefunden haben (2. Gleichung), die andere aber wird von selbst erfüllt. Für $B > \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 37.) bleibt die erste Gleichung unverändert, statt der zweiten aber muß man entsprechend schreiben:

$$\mathrm{Cos.}\ \Pi(x - c) = \mathrm{Cos.}\ (\pi - B)\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(a)$$

es ist aber $\mathrm{Cos.}\ \Pi(x - c) = -\mathrm{Cos.}\ \Pi(c - x)$ (23. Satz.), und auch $\mathrm{Cos.}\ (\pi - B) = -\mathrm{Cos.}\ B.$ Wenn A ein rechter oder stumpfer Winkel ist, so muß statt $x$ und $c - x$ gesetzt werden $c - x$ und $x$, um diesen Fall auf den frühern zurückzuführen.

Um $x$ aus beiden Gleichungen zu eliminiren, bemerken wir, daß (36. Satz.)

$$\mathrm{Cos.}\ \Pi(c - x)$$

$$= \frac{1 - \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2}\Pi(c - x)^2}{1 + \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2}\Pi(c - x)^2}$$

$$= \frac{1 - e^{2x - 2c}}{1 + e^{2x - 2c}}$$

$$= \frac{1 - \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2}\Pi(c)^2\ \mathrm{Cot.}\ \frac{1}{2}\Pi(x)^2}{1 + \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2}\Pi(c)^2\ \mathrm{Cot.}\ \frac{1}{2}\Pi(x)^2}$$

$$= \frac{\text{Cos. } \Pi(c) - \text{Cos. } \Pi(x)}{1 - \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(x)}$$

Substituirt man hier den Ausdruck für Cos. $\Pi(x)$, Cos. $\Pi(c-x)$, so erhält man:

$$\text{Cos. } \Pi(c) = \frac{\text{Cos. } \Pi(a) \text{ Cos. B} + \text{Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. A}}{1 + \text{Cos. } \Pi(a) \text{ Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. A Cos. B}}$$

woraus folgt:

$$\text{Cos. } \Pi(a) \text{ Cos. B} = \frac{\text{Cos. } \Pi(c) - \text{Cos. A Cos. } \Pi(b)}{1 - \text{Cos. A Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. } \Pi(c)}$$

und endlich:

$$\text{sin. } \Pi(c)^2 = [1 - \text{Cos. B Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(a)] \times [1 - \text{Cos. A Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. } \Pi(c)]$$

Auf ähnliche Weise muß auch sein:

4. $$\text{sin. } \Pi(a)^2 = [1 - \text{Cos. C Cos. } \Pi(a) \text{ Cos. } \Pi(b)] \times [1 - \text{Cos. B Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(a)]$$

$$\text{sin. } \Pi(b)^2 = [1 - \text{Cos. A Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. } \Pi(c)] \times [1 - \text{Cos C. Cos. } \Pi(a) \text{ Cos. } \Pi(b)]$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man noch:

$$\frac{\text{sin. } \Pi(b)^2 \text{ sin. } \Pi(c)^2}{\text{sin. } \Pi(a)^2} = [1 - \text{Cos. A Cos. } \Pi(b) \text{ Cos. } \Pi(c)]^2$$

Hieraus folgt ohne Zweideutigkeit der Zeichen:

5. $\mathrm{Cos.}\ A\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(b)\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(c)$

$$+\frac{\sin.\ \Pi(b)\ \sin.\ \Pi(c)}{\sin.\ \Pi(a)} = 1$$

Substituirt man hier den Werth von $\sin.\ \Pi(c)$ übereinstimmend mit der Gleichung (3.)

$$\sin.\ \Pi(c) = \frac{\sin.\ A}{\sin.\ C}\ \mathrm{tang.}\ \Pi(a)\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(c)$$

so erhält man

$$\mathrm{Cos.}\ \Pi(c) = \frac{\mathrm{Cos.}\ \Pi(a)\ \sin.\ C}{\sin. A\ \sin. \Pi(b) + \mathrm{Cos.} A\ \sin. C\ \mathrm{Cos.} \Pi(a) \mathrm{Cos.} \Pi(b)}$$

aber indem man diesen Ausdruck für $\mathrm{Cos.}\ \Pi(c)$ in die Gleichung (4) substituirt:

$$(6)\quad \mathrm{Cot.}\ A\ \sin.\ C\ \sin.\ \Pi(b) + \mathrm{Cos.}\ C = \frac{\mathrm{Cos.}\ \Pi(b)}{\mathrm{Cos.}\ \Pi(a)}$$

Durch Elimination von $\sin.\ \Pi(b)$ mit Hülfe der Gleichung (3) kommt:

$$\frac{\mathrm{Cos.}\ \Pi(a)}{\mathrm{Cos.}\ \Pi(b)}\ \mathrm{Cos.}\ C = 1 - \frac{\mathrm{Cos.}\ A}{\sin.\ B}\ \sin.\ C\ \sin.\ \Pi(a)$$

Inzwischen giebt die Gleichung (6) durch Veränderung der Buchstaben:

$$\frac{\mathrm{Cos.}\ \Pi(a)}{\mathrm{Cos.}\ \Pi(b)}$$
$$= \mathrm{Cot.}\ B\ \mathrm{sin.}\ C\ \mathrm{sin.}\ \Pi(a) + \mathrm{Cos.}\ C$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$7.\quad \mathrm{Cos.}\ A + \mathrm{Cos.}\ B\ \mathrm{Cos.}\ C = \frac{\mathrm{sin.}\ B\ \mathrm{sin.}\ C}{\mathrm{sin.}\ \Pi(a)}$$

Alle vier Gleichungen für die Abhängigkeit der Seiten a, b, c, und der gegenüberliegenden Winkel A, B, C, im geradlinigen Dreiecke werden demnach sein [Gleich (3), (5), (6), (7)]:

$$8.\ \left\{\begin{array}{l} \mathrm{sin.}\ A\ \mathrm{tang.}\ \Pi(a) = \mathrm{sin.}\ B\ \mathrm{tang.}\ \Pi(b) \\ \mathrm{Cos.}\ A\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(b)\ \mathrm{Cos.}\ \Pi(c) + \\ \qquad \dfrac{\mathrm{sin.}\ \Pi(b)\ \mathrm{sin.}\ \Pi(c)}{\mathrm{sin.}\ \Pi(a)} = 1 \\ \mathrm{Cot.}\ A\ \mathrm{sin.}\ C\ \mathrm{sin.}\ \Pi(b) + \mathrm{Cos.}\ C \\ \qquad = \dfrac{\mathrm{Cos.}\ \Pi(b)}{\mathrm{Cos.}\ \Pi(a)} \\ \mathrm{Cos.}\ A + \mathrm{Cos.}\ B\ \mathrm{Cos.}\ C = \dfrac{\mathrm{sin.}\ B\ \mathrm{sin.}\ C}{\mathrm{sin.}\ \Pi(a)} \end{array}\right.$$

Wenn die Seiten a, b, c des Dreiecks sehr klein sind, so kann man sich begnügen mit den genäherten Bestimmungen. (36. Satz.)

$$\text{Cot. } \Pi(a) = a$$
$$\sin. \Pi(a) = 1 - \tfrac{1}{2} a^2$$
$$\text{Cos. } \Pi(a) = a$$

und auf ähnliche Weise auch für die anderen Seiten b und c. Die Gleichungen 8. gehen für solche Dreiecke über in folgende:

$$b \sin. A = a \sin. B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos. } A$$
$$a \sin. (A + C) = b \sin. A$$
$$\text{Cos. } A + \text{Cos. } (B + C) = o$$

Von diesen Gleichungen sind die beiden ersten in der gewöhnlichen Geometrie angenommen; die beiden letzten führen mit Hülfe der ersten zu dem Schlusse

$$A + B + C = \pi$$

Demnach geht die imaginäre Geometrie in die gewöhnliche über, wenn man voraussetzt, daß die Seiten eines geradlinigen Dreiecks sehr klein sind.

Ueber die Ausmessung der krummen Linien, der ebenen Figuren, der Oberflächen und des Inhalts der Körper, so wie über die Anwendung der imaginären Geometrie auf die Analysis, habe ich einige Untersuchungen in den „Gelehrten Schriften der Universität Kasan" veröffentlicht.

Die Gleichungen (8.) gewähren für sich selbst schon eine hinreichende Grundlage, um die Voraussetzung der imaginären Geometrie als möglich anzusehen. Demnach giebt es kein anderes Mittel als die astronomischen Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen, um über die Genauigkeit zu urtheilen, welche den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukommen. Diese Genauigkeit erstreckt sich, wie ich in einer meiner Abhandlungen gezeigt habe, sehr weit, so daß z. B. in Dreiecken, deren Seiten für unsere Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Theil einer Secunde von zwei Rechten verschieden ist.

Es ist noch bemerkenswerth, daß die vier Gleichungen (8.) der ebenen Geometrie in die Gleichungen für sphärische Dreiecke übergehen, wenn man statt der Seiten a, b, c setzt: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, mit dieser Veränderung muß man aber folglich auch setzen:

$$\sin. \Pi(a) = \frac{1}{\text{Cos. } a}$$

$$\text{Cos. } \Pi(a) = \sqrt{-1}\ \text{tang. } a$$

$$\text{tang. } \Pi(a) = \frac{1}{\text{sin. a.} \sqrt{-1}}$$

und auf ähnliche Weise auch für die Seiten b und c. Dergestalt geht man von den Gleichungen (8.) über zu den folgenden:

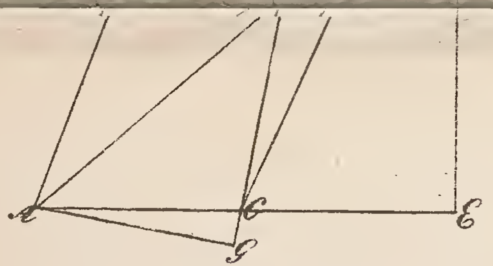
$$\text{sin. A sin. b} = \text{sin. B sin. a}$$

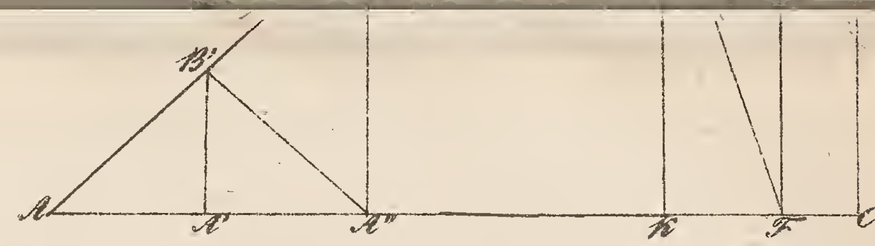
$$\text{Cos. a} = \text{Cos. b Cos. c} + \text{sin. b sin. c Cos. A}$$

$$\text{Cot. A sin. C} + \text{Cos. C Cos. b} = \text{sin. b Cot. a}$$

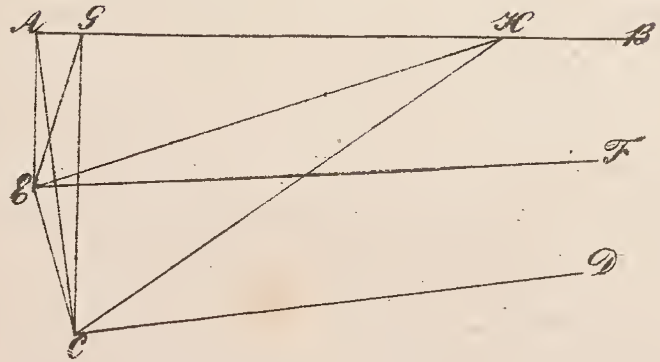
$$\text{Cos. A} = \text{Cos. a sin. B sin. C} - \text{Cos. B Cos. C}$$

Anastatischer Druck von A. Dannenberg. Berlin, N.

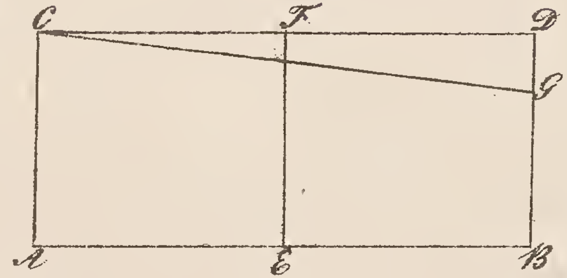


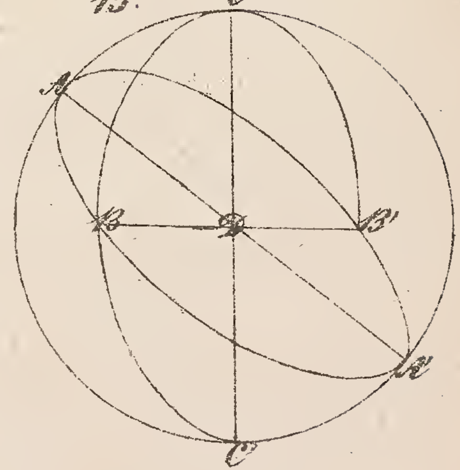

13.



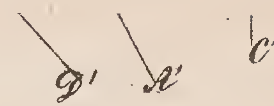

11.

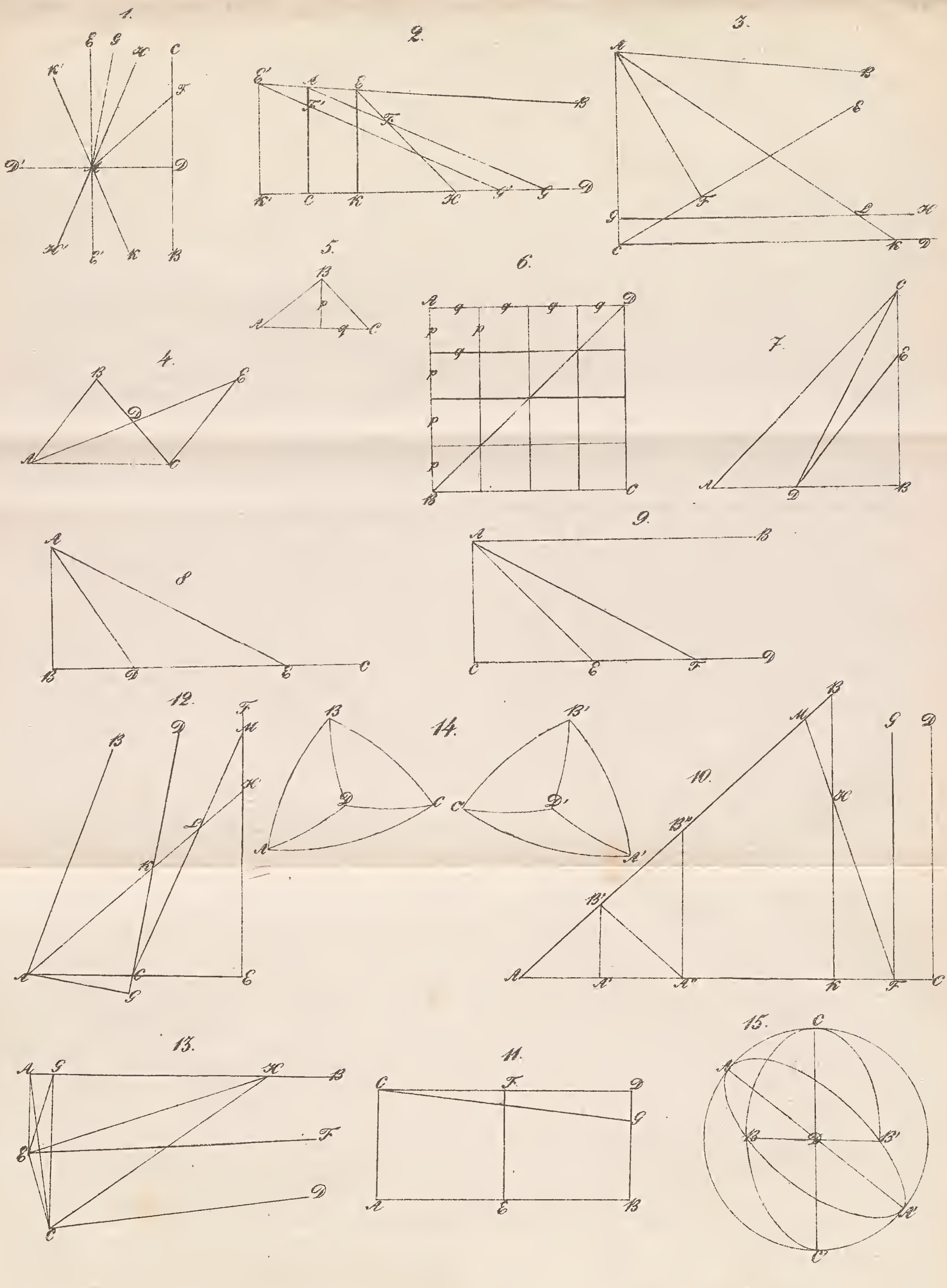


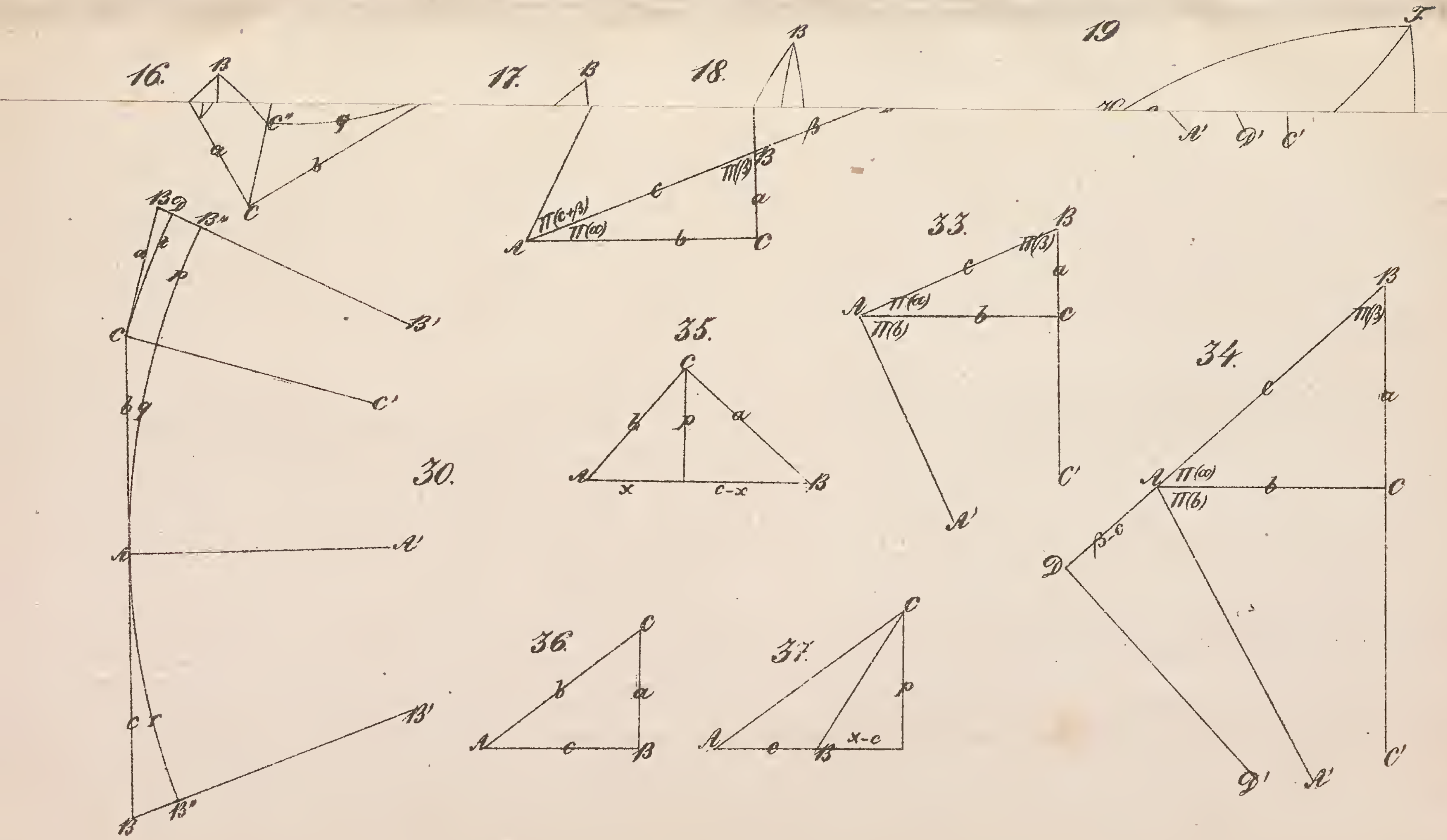

15.

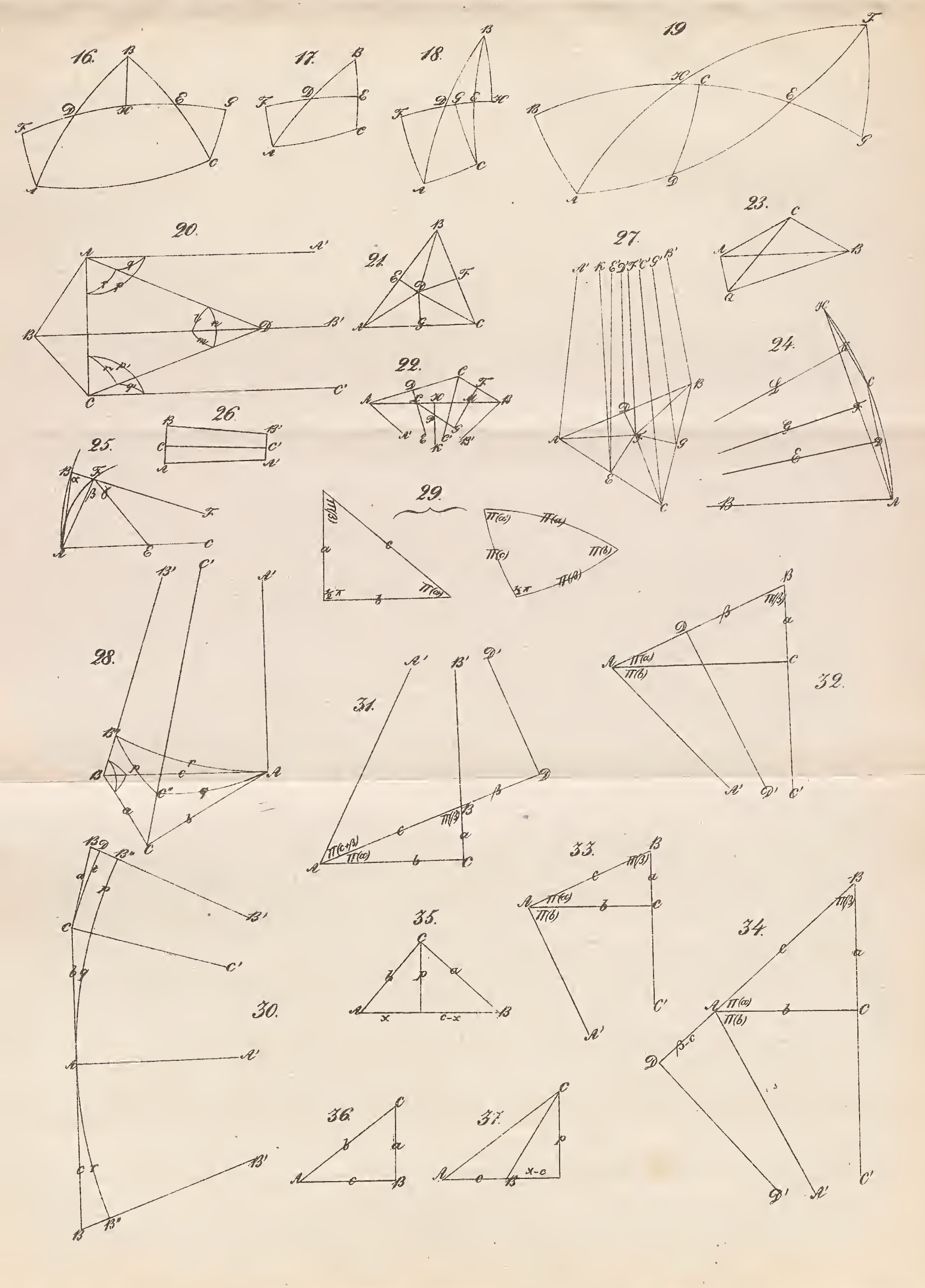





1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.


16.
17.
18.
19
30.
33.
34.
35.
36.
37.


16.
17.
18.
19
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.